Υπάρχουν προβλήματα που η επίλυσή τους οδηγεί σε εξίσωση μ' έναν άγνωστο και στην οποία ο μεγαλύτερος εκθέτης του αγνώστου είναι ο αριθμός 2.

$x^2 = 9$,

$x^2 - 3x = 0$,

$x^2 + 15x - 16 = 0$

Σε καθεμία από τις προηγούμενες περιπτώσεις λέμε ότι έχουμε **εξίσωση 2ου βαθμού με έναν άγνωστο (δευτεροβάθμια εξίσωση)**.

Από τα προηγούμενα παραδείγματα προκύπτει ότι η γενική μορφή μιας εξίσωσης 2ου βαθμού με άγνωστο x είναι

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \text{ με } \alpha \neq 0$$

Οι αριθμοί α, β, γ λέγονται **συντελεστές** της εξίσωσης. Ο συντελεστής γ λέγεται και **σταθερός όρος**. Οι συντελεστές σε καθεμιά από τις παρακάτω εξισώσεις είναι:

$x^2 - 9 = 0$:	$\alpha = 1$	$\beta = 0$	$\gamma = -9$
$x^2 - 3x = 0$:	$\alpha = 1$	$\beta = -3$	$\gamma = 0$
$x^2 + 15x - 16 = 0$:	$\alpha = 1$	$\beta = 15$	$\gamma = -16$

A Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων

Θυμόμαστε ότι: **Αν $\alpha \cdot \beta = 0$ τότε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$**

Επίλυση εξίσωσης της μορφής $\alpha x^2 + \beta x = 0$ με $\alpha \neq 0$

Για να λύσουμε την εξίσωση $x^2 = 3x$ εργαζόμαστε ως εξής:

- Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο α' μέλος.
- Αναλύουμε το α' μέλος σε γινόμενο παραγόντων.
- Για να είναι το γινόμενο $x(x - 3)$ ίσο με το μηδέν πρέπει $x = 0$ ή $x - 3 = 0$.

$x^2 = 3x$

$x^2 - 3x = 0$

$x(x - 3) = 0$

$x = 0$ ή $x - 3 = 0$

$x = 0$ ή $x = 3$

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις $x = 0$ και $x = 3$

Επίλυση εξίσωσης της μορφής $\alpha x^2 + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$

Για να λύσουμε την εξίσωση $x^2 - 9 = 0$, εργαζόμαστε ως εξής:

1ος τρόπος:

- Το α' μέλος της εξίσωσης είναι διαφορά τετραγώνων και το β' μέλος είναι μηδέν.
- Αναλύουμε το α' μέλος σε γινόμενο παραγόντων.
- Για να είναι το γινόμενο $(x - 3)(x + 3)$ ίσο με το μηδέν πρέπει $x - 3 = 0$ ή $x + 3 = 0$

$x^2 - 9 = 0$

$x^2 - 3^2 = 0$

$(x - 3)(x + 3) = 0$

$x - 3 = 0$ ή $x + 3 = 0$

$x = 3$ ή $x = -3$

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις $x = 3$ και $x = -3$

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad \alpha \neq 0$

$x^2 = 9$

$x^2 - 9 = 0$

$1 \cdot x^2 + 0x + (-9) = 0$

$\alpha = 1 \quad \beta = 0 \quad \gamma = -9$

$x^2 - 3x = 0$

$1 \cdot x^2 + (-3)x + 0 = 0$

$\alpha = 1 \quad \beta = -3 \quad \gamma = 0$

$1 \cdot x^2 + 15x - 16 = 0$

$\alpha = 1 \quad \beta = 15 \quad \gamma = -16$

αν $\alpha \cdot \beta = 0$ τότε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$

Υπάρχουν προβλήματα που η επίλυσή τους οδηγεί σε εξίσωση μ' έναν άγνωστο και στην οποία ο μεγαλύτερος εκθέτης του αγνώστου είναι ο αριθμός 2.

$x^2 = 9,$

$x^2 - 3x = 0,$

$x^2 + 15x - 16 = 0$

Σε καθεμία από τις προηγούμενες περιπτώσεις λέμε ότι έχουμε **εξίσωση 2ου βαθμού με έναν άγνωστο (δευτεροβάθμια εξίσωση)**.

Από τα προηγούμενα παραδείγματα προκύπτει ότι η γενική μορφή μιας εξίσωσης 2ου βαθμού με άγνωστο x είναι

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad \text{με} \quad \alpha \neq 0$$

Οι αριθμοί α, β, γ λέγονται **συντελεστές** της εξίσωσης. Ο συντελεστής γ λέγεται και **σταθερός όρος**. Οι συντελεστές σε καθεμιά από τις παρακάτω εξισώσεις είναι:

$x^2 - 9 = 0$:	$\alpha = 1$	$\beta = 0$	$\gamma = -9$
$x^2 - 3x = 0$:	$\alpha = 1$	$\beta = -3$	$\gamma = 0$
$x^2 + 15x - 16 = 0$:	$\alpha = 1$	$\beta = 15$	$\gamma = -16$

A Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων

Θυμόμαστε ότι: **Αν $\alpha \cdot \beta = 0$ τότε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$**

Επίλυση εξίσωσης της μορφής $\alpha x^2 + \beta x = 0$ με $\alpha \neq 0$

Για να λύσουμε την εξίσωση $x^2 = 3x$ εργαζόμαστε ως εξής:

- Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο α' μέλος.
- Αναλύουμε το α' μέλος σε γινόμενο παραγόντων.
- Για να είναι το γινόμενο $x(x - 3)$ ίσο με το μηδέν πρέπει $x = 0$ ή $x - 3 = 0$.

$$x^2 = 3x$$
$$x^2 - 3x = 0$$
$$x(x - 3) = 0$$
$$x = 0 \quad ή \quad x - 3 = 0$$
$$x = 0 \quad ή \quad x = 3$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις $x = 0$ και $x = 3$

Επίλυση εξίσωσης της μορφής $\alpha x^2 + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$

Για να λύσουμε την εξίσωση $x^2 - 9 = 0$, εργαζόμαστε ως εξής:

1ος τρόπος:
- Το α' μέλος της εξίσωσης είναι διαφορά τετραγώνων και το β' μέλος είναι μηδέν.
- Αναλύουμε το α' μέλος σε γινόμενο παραγόντων.
- Για να είναι το γινόμενο $(x - 3)(x + 3)$ ίσο με το μηδέν πρέπει $x - 3 = 0$ ή $x + 3 = 0$

$$x^2 - 9 = 0$$
$$x^2 - 3^2 = 0$$
$$(x - 3)(x + 3) = 0$$
$$x - 3 = 0 \quad ή \quad x + 3 = 0$$
$$x = 3 \quad ή \quad x = -3$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις $x = 3$ και $x = -3$

$$x^2 = 9$$
$$x^2 - 9 = 0$$
$$x^2 - 3^2 = 0$$
$$(x-3)\cdot(x+3) = 0$$
$$x - 3 = 0 \quad ή \quad x + 3 = 0$$
$$x = 3 \quad ή \quad x = -3$$

$$x^2 = 9$$
$$x = \pm\sqrt{9}$$
$$x = \pm 3$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0$$

$$x = 0 \quad ή \quad x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

$$x^2 + 15x - 16 = 0$$

$$x^2 + 16x - x - 16 = 0$$

$$x(x+16) - (x+16) = 0$$

$$(x+16)(x-1) = 0$$

$$x + 16 = 0 \quad ή \quad x - 1 = 0$$

$$x = -16 \quad ή \quad x = 1$$

$$\alpha x^2 + \beta x = 0$$

2ος τρόπος:
- Όταν α είναι θετικός, η εξίσωση $x^2 = α$ έχει δύο λύσεις, τις $x = \sqrt{α}$ και $x = -\sqrt{α}$

$$x^2 - 9 = 0$$
$$x^2 = 9$$
$$x = \sqrt{9} \ \text{ή} \ x = -\sqrt{9}$$
$$x = 3 \ \text{ή} \ x = -3$$

Για να λύσουμε την εξίσωση $x^2 + 16 = 0$, αν εργαστούμε όπως προηγουμένως, παρατηρούμε ότι αυτή γράφεται $x^2 = -16$. Η εξίσωση αυτή δεν έχει λύση (αδύνατη), γιατί το τετράγωνο κάθε πραγματικού αριθμού είναι θετικός αριθμός ή μηδέν και δεν είναι δυνατόν να είναι ίσο με -16.

Αν α είναι αρνητικός αριθμός, τότε η εξίσωση $x^2 = α$ δεν έχει λύση (αδύνατη)

Η εξίσωση $x^2 = 0$ έχει λύση την $x = 0$. Η λύση αυτή λέγεται **διπλή**, γιατί η εξίσωση $x^2=0$ γράφεται $x \cdot x = 0$, οπότε $x = 0$ ή $x = 0$ (δηλαδή έχει δύο φορές την ίδια λύση).

Επίλυση εξίσωσης της μορφής $αx^2 + βx + γ = 0$ με $α \neq 0$

Για να λύσουμε την εξίσωση $9x^2 - 6x + 1 = 0$ εργαζόμαστε ως εξής:

- Το πρώτο μέλος της εξίσωσης είναι ανάπτυγμα τετραγώνου σύμφωνα με την ταυτότητα $α^2 - 2αβ + β^2 = (α - β)^2$
- Για να είναι $(3x - 1)^2 = 0$ πρέπει $3x - 1 = 0$

$$9x^2 - 6x + 1 = 0$$
$$(3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 1 + 1^2 = 0$$
$$(3x - 1)^2 = 0$$
$$3x - 1 = 0 \ \text{ή} \ x = \frac{1}{3}$$

Άρα η εξίσωση έχει μία διπλή λύση, την $x = \frac{1}{3}$

Για να λύσουμε την εξίσωση $x^2 + 15x - 16 = 0$ σχηματίζουμε στο α΄ μέλος ανάπτυγμα τετραγώνου εργαζόμενοι ως εξής:

- Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους της εξίσωσης με 4α, όπου α ο συντελεστής του x^2.
- Μεταφέρουμε στο β΄ μέλος το σταθερό όρο και στο α΄ μέλος δημιουργούμε παράσταση της μορφής $α^2 + 2αβ$ ή $α^2 - 2αβ$.
- Για να συμπληρωθεί το ανάπτυγμα τετραγώνου προσθέτουμε και στα δύο μέλη το $β^2$.
- Χρησιμοποιούμε μία από τις ταυτότητες
  $α^2 + 2αβ + β^2 = (α + β)^2$
  $α^2 - 2αβ + β^2 = (α - β)^2$

$$x^2 + 15x - 16 = 0$$
$$4x^2 + 60x - 64 = 0$$
$$(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 15 = 64$$
$$(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 15 + 15^2 = 64 + 15^2$$
$$(2x + 15)^2 = 289$$
$$2x + 15 = \sqrt{289} \ \text{ή} \ 2x + 15 = -\sqrt{289}$$
$$2x + 15 = 17 \ \text{ή} \ 2x + 15 = -17$$
$$2x = 2 \ \text{ή} \ 2x = -32$$
$$x = 1 \ \text{ή} \ x = -16$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις $x = 1$ και $x = -16$

Η μέθοδος με την οποία λύσαμε την εξίσωση $x^2 + 15x - 16 = 0$ είναι γνωστή ως **μέθοδος συμπλήρωσης τετραγώνου**.

$$9x^2 - 6x + 1 = 0$$
$$(3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 1 + 1^2 = 0$$
$$(3x - 1)^2 = 0$$
$$(3x - 1) \cdot (3x - 1) = 0$$
$$3x - 1 = 0 \ \text{ή} \ 3x - 1 = 0$$
$$3x = 1 \ \text{ή} \ 3x = 1$$
$$x = \frac{1}{3} \ \text{ή} \ x = \frac{1}{3}$$

$x = \frac{1}{3}$ διπλή ρίζα

2ος τρόπος:

- Όταν α είναι θετικός, η εξίσωση $x^2 = α$ έχει δύο λύσεις, τις $x = \sqrt{α}$ και $x = -\sqrt{α}$

$$x^2 - 9 = 0$$
$$x^2 = 9$$
$$x = \sqrt{9} \text{ ή } x = -\sqrt{9}$$
$$x = 3 \text{ ή } x = -3$$

Για να λύσουμε την εξίσωση $x^2 + 16 = 0$, αν εργαστούμε όπως προηγουμένως, παρατηρούμε ότι αυτή γράφεται $x^2 = -16$. Η εξίσωση αυτή δεν έχει λύση (αδύνατη), γιατί το τετράγωνο κάθε πραγματικού αριθμού είναι θετικός αριθμός ή μηδέν και δεν είναι δυνατόν να είναι ίσο με –16.

Αν α είναι αρνητικός αριθμός, τότε η εξίσωση $x^2 = α$ δεν έχει λύση (αδύνατη)

Η εξίσωση $x^2 = 0$ έχει λύση την $x = 0$. Η λύση αυτή λέγεται **διπλή**, γιατί η εξίσωση $x^2=0$ γράφεται $x \cdot x = 0$, οπότε $x = 0$ ή $x = 0$ (δηλαδή έχει δύο φορές την ίδια λύση).

Επίλυση εξίσωσης της μορφής $αx^2 + βx + γ = 0$ με $α \neq 0$

Για να λύσουμε την εξίσωση $9x^2 - 6x + 1 = 0$ εργαζόμαστε ως εξής:

- Το πρώτο μέλος της εξίσωσης είναι ανάπτυγμα τετραγώνου σύμφωνα με την ταυτότητα $α^2 - 2αβ + β^2 = (α - β)^2$
- Για να είναι $(3x - 1)^2 = 0$ πρέπει $3x - 1 = 0$

$$9x^2 - 6x + 1 = 0$$
$$(3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 1 + 1^2 = 0$$
$$(3x - 1)^2 = 0$$
$$3x - 1 = 0 \text{ ή } x = \frac{1}{3}$$

Άρα η εξίσωση έχει μία διπλή λύση, την $x = \frac{1}{3}$

Για να λύσουμε την εξίσωση $x^2 + 15x - 16 = 0$ σχηματίζουμε στο α′ μέλος ανάπτυγμα τετραγώνου εργαζόμενοι ως εξής:

- Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους της εξίσωσης με 4α, όπου α ο συντελεστής του x^2.
- Μεταφέρουμε στο β′ μέλος το σταθερό όρο και στο α′ μέλος δημιουργούμε παράσταση της μορφής $α^2 + 2αβ$ ή $α^2 - 2αβ$.
- Για να συμπληρωθεί το ανάπτυγμα τετραγώνου προσθέτουμε και στα δύο μέλη το $β^2$.
- Χρησιμοποιούμε μία από τις ταυτότητες
$$α^2 + 2αβ + β^2 = (α + β)^2$$
$$α^2 - 2αβ + β^2 = (α - β)^2$$

$$x^2 + 15x - 16 = 0$$
$$4x^2 + 60x - 64 = 0$$
$$(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 15 = 64$$
$$(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 15 + 15^2 = 64 + 15^2$$
$$(2x + 15)^2 = 289$$
$$2x + 15 = \sqrt{289} \text{ ή } 2x + 15 = -\sqrt{289}$$
$$2x + 15 = 17 \text{ ή } 2x + 15 = -17$$
$$2x = 2 \text{ ή } 2x = -32$$
$$x = 1 \text{ ή } x = -16$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις $x = 1$ και $x = -16$

Η μέθοδος με την οποία λύσαμε την εξίσωση $x^2 + 15x - 16 = 0$ είναι γνωστή ως **μέθοδος συμπλήρωσης τετραγώνου**.

$$x^2 + 15x - 16 = 0 \qquad (α \pm β)^2 = α^2 \pm 2αβ + β^2$$
$$4α = 4 \cdot 1 = 4$$
$$4(x^2 + 15x - 16) = 4 \cdot 0$$
$$4x^2 + 60x - 64 = 0$$
$$(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 15 - 64 = 0$$
$$\underbrace{(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 15 + 15^2} - 15^2 - 64 = 0$$
$$(2x + 15)^2 - 225 - 64 = 0$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 17 \\ \hline 119 \\ 17\ \ \\ \hline 289 \end{array}$$

$$(2x + 15)^2 - 289 = 0$$
$$(2x + 15)^2 = 289$$
$$2x + 15 = \pm\sqrt{289}$$
$$2x + 15 = \pm 17$$

ή

$$2x + 15 = 17 \qquad 2x + 15 = -17$$
$$2x = -15 + 17 \qquad 2x = -15 - 17$$
$$\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = \frac{2}{2} \qquad \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = \frac{-32}{2}$$
$$x = 1 \qquad x = -16$$

$x^2 + 1 = 0$

$x^2 + 1 = 0$ αδύνατη

$x^2 = -1$

γιατί $x^2 \geq 0$ $-1 < 0$

$-3x^2 - 7 = 0$

$-3x^2 - 7 = 0$

$\frac{-\cancel{3}x^2}{-\cancel{3}} = \frac{7}{-3}$

$x^2 = -\frac{7}{3}$ αδύνατη

γιατί $x^2 \geqslant 0$ και $-\frac{7}{3} < 0$

$x^2 - 1 = 0$

$1^{ος}$ τρόπος

$x^2 - 1 = 0$

$x^2 - 1^2 = 0$

$(x-1)\cdot(x+1) = 0$

$x - 1 = 0$ ή $x + 1 = 0$

$x = 1$ ή $x = -1$

$2^{ος}$ τρόπος

$x^2 - 1 = 0$

$x^2 = 1$

$x = \pm\sqrt{1}$

$x = \pm 1$

$x^2 - 6 = 0$

$6 = \sqrt{6}^2$

$x^2 - 6 = 0$

$x^2 = 6$

$x = \pm\sqrt{6}$

$x^2 - 6 = 0$

$x^2 - \sqrt{6}^2 = 0$

$(x - \sqrt{6}) \cdot (x + \sqrt{6}) = 0$

$x - \sqrt{6} = 0$ ή $x + \sqrt{6} = 0$

$x = \sqrt{6}$ ή $x = -\sqrt{6}$

$$(x + 1)(2x - 3) = 0,$$

$(x+1) = 0$ ó $2x - 3 = 0$

$x = -1$

$$\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$x(x^2 - 4) = x^2 - 4$$

$$x(x-2)(x+2) = (x-2)(x+2)$$

$$x(x-2)(x+2) - (x-2)(x+2) = 0$$

$$(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x-1) = 0$$

$x - 2 = 0$ ou $x + 2 = 0$ ou $x - 1 = 0$

$x = 2$ ou $x = -2$ ou $x = 1$

Να λύσετε τις παρακάτω ασκήσεις

α) $(1 + 2x)^2 = 3(1 + 2x)$

β) $3x^2 - 7x + 4 = 0$

γ) $(3x - 1)(5 - x) = (1 - 3x)(4x + 7)$

$$(1 + 2x)^2 = 3(1 + 2x)$$

$$(1+2x)^2 - 3(1+2x) = 0$$

$$(1+2x)\cdot\left[(1+2x) - 3\right] = 0$$

$$(1+2x)\cdot(1+2x-3) = 0$$

$$(1+2x)\cdot(2x-2) = 0$$

$1+2x=0$ ou $2x-2=0$

$2x = -1$ $\qquad$ $2x = 2$

$\dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = -\dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $\dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = \dfrac{2}{2}$

$x = -\dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $x = 1$

$$3x^2 - 7x + 4 = 0$$

$$3x^2 - 3x - 4x + 4 = 0$$

$$3x \cdot (x - 1) - 4(x - 1) = 0$$

$$(x - 1) \cdot (3x - 4) = 0$$

$x - 1 = 0$ ù $3x - 4 = 0$

$x = 1$

$$3x = 4$$

$$\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \frac{4}{3}$$

$$x = \frac{4}{3}$$

$$(3x - 1)(5 - x) = (1 - 3x)(4x + 7)$$

$$(3x-1)\cdot(5-x) - (1-3x)\cdot(4x+7) = 0$$

$$(3x-1)\cdot(5-x) + (3x-1)\cdot(4x+7) = 0$$

$$(3x-1)\cdot\left[(5-x) + (4x+7)\right] = 0$$

$$(3x-1)\,(5-x+4x+7) = 0$$

$$(3x-1)\cdot(3x+12) = 0$$

$3x-1=0$ ó $3x+12=0$

$3x=1$ ó $3x=-12$

$\dfrac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \dfrac{1}{3}$ ó $\dfrac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \dfrac{-12}{3}$

$x=\dfrac{1}{3}$ ó $x=-4$

$$-(1-3x) = -1+3x = 3x-1 = +(3x-1)$$

Το γινόμενο δύο διαδοχικών θετικών ακεραίων αν διαιρεθεί με το άθροισμα τους δίνει πηλίκο 7 και υπόλοιπο 23 . Να βρείτε τους αριθμούς

Έστω x και $x+1$ οι δύο θετικοί διαδοχικοί ακέραιοι

$$\begin{array}{l|l} x\cdot(x+1) & x+(x+1) \\ \cline{2-2} & 7 \\ 23 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} \Delta & \delta \\ \cline{2-2} & \pi \\ \upsilon & \end{array}$$

$$\Delta = \delta\cdot\pi + \upsilon$$

$$x\cdot(x+1) = [x+(x+1)]\cdot 7 + 23$$

$$x\cdot(x+1) = (x+x+1)\cdot 7 + 23$$

$$x\cdot(x+1) = (2x+1)\cdot 7 + 23$$

epanagopou@sch.gr

Το γινόμενο δύο διαδοχικών θετικών ακεραίων αν διαιρεθεί με το άθροισμα τους δίνει πηλίκο 7 και υπόλοιπο 23 . Να βρείτε τους αριθμούς

$$x\cdot(x+1) = (2x+1)\cdot 7 + 23$$

$$x^2 + x = 14x + 7 + 23$$

$$x^2 + x - 14x - 7 - 23 = 0$$

$$x^2 - 13x - 30 = 0$$

$$x^2 + 2x - 15x - 30 = 0$$

$$x\cdot(x+2) - 15\cdot(x+2) = 0$$

$$(x+2)\cdot(x-15) = 0$$

$x+2=0$ ή $x-15=0$

$x=-2$ ή $\boxed{x=15}$ δεκτή

απορρίπτεται ως λύση του προβλήματος

Δοκιμή

$x=15$

$x+1=16$

$x\cdot(x+1) = 15\cdot 16 = 240$

$x+(x+1) = 15+16 = 31$

$$\begin{array}{r} 240 \\ -217 \\ \hline =23 \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} & 31 \\ \hline & 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 16 \\ \hline 90 \\ 15 \\ \hline 240 \end{array}$$

Καλό
διάβασμα!